Applications - Chapitre 2

Cinématique et dynamique du point matériel

A.2.1 Course entre voiture et moto

A.2.2 Carambole (billard indien)

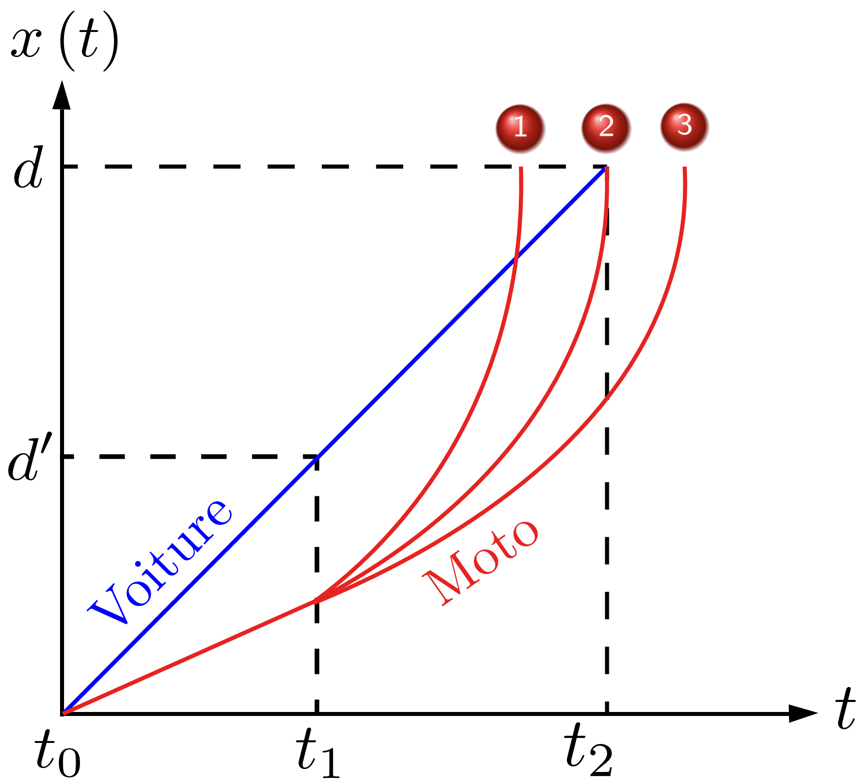
A.2.1 Course entre voiture et moto

A.2.2 Carambole (billard indien)

A.2.1 Course entre voiture et moto

- On considère une voiture et une moto qui font la course sur une distance d en ligne droite.
- Au temps initial t_0, les véhicules se trouvent à la même hauteur. La voiture a une vitesse scalaire constante v_v et la moto a une vitesse scalaire constante v_m où $v_m < v_v$.
- Au temps t_1, la voiture atteint un pont à une distance $d' < d$ du point de départ. A partir du temps t_1, la moto accélère avec une accélération scalaire constante a.

1. Représentation graphique de la position au cours du temps $x(t)$:



1. Moto gagne
2. Match nul
3. Voiture gagne

2. Détermination de l'accélération scalaire a de la moto pour que la moto gagne, qu'il y ait match nul, que la voiture gagne.

- Position des véhicules au temps t_1 :

$$x_v\left(t_1\right) = d' = v_v\left(t_1 - t_0\right) \tag{A.2.1}$$

$$x_m\left(t_1\right) = v_m\left(t_1 - t_0\right) \tag{A.2.2}$$

- Position des véhicules au temps t_2 :

$$x_v\left(t_2\right) = d = v_v\left(t_2 - t_1\right) + x_v\left(t_1\right) \overset{(A.2.1)}{=\!=\!=} v_v\left(t_2 - t_1\right) + d' \tag{A.2.3}$$

$$\begin{aligned} x_m\left(t_2\right) &= \frac{1}{2}\,a\left(t_2 - t_1\right)^2 + v_m\left(t_2 - t_1\right) + x_m\left(t_1\right) \\ &\overset{(A.2.2)}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\,a\left(t_2 - t_1\right)^2 + v_m\left(t_2 - t_0\right) \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

- Match nul : $x_m\left(t_2\right) = x_v\left(t_2\right) = d$ si $a \equiv a_0$

$$(A.2.4) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2}\,a_0\left(t_2 - t_1\right)^2 + v_m\left(t_2 - t_0\right)$$

- Match nul : accélération

$$a_0 = \frac{2\,d - 2\,v_m\,(t_2 - t_0)}{(t_2 - t_1)^2} \tag{A.2.5}$$

$$(A.2.1) \quad \Rightarrow \quad t_1 - t_0 = \frac{d'}{v_v}$$

$$(A.2.3) \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{d - d'}{v_v} \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_0 = \frac{d}{v_v}$$

$$a_0 = \frac{2\,d - 2\,d\,\dfrac{v_m}{v_v}}{\dfrac{(d - d')^2}{v_v^2}} = \frac{2\,d\,v_v\,(v_v - v_m)}{(d - d')^2} \tag{A.2.6}$$

1. Si $a > a_0 \Rightarrow$ moto gagne
2. Si $a = a_0 \Rightarrow$ match nul
3. Si $a < a_0 \Rightarrow$ voiture gagne

- Analyse dimensionnelle :

$$a_0 = \frac{2\,d\,v_v\,(v_v - v_m)}{(d - d')^2} = \frac{[\mathrm{m}]\,[\mathrm{m\,s^{-1}}]\,[\mathrm{m\,s^{-1}}]}{[\mathrm{m}]^2} = [\mathrm{m\,s^{-2}}]$$

- Cas limites :

1. Très grande vitesse de la voiture ($v_v \to \infty$) :

$$\lim_{v_v \to \infty} a_0 = \lim_{v_v \to \infty} \frac{2\,d\,v_v\,(v_v - v_m)}{(d - d')^2} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad a_0 \to \infty$$

2. Vitesses égales ($v_m \to v_v$) :

$$\lim_{v_m \to v_v} a_0 = \lim_{v_m \to v_v} \frac{2\,d\,v_v\,(v_v - v_m)}{(d - d')^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_0 \to 0$$

3. Pont à l'arrivée ($d' \to d$) :

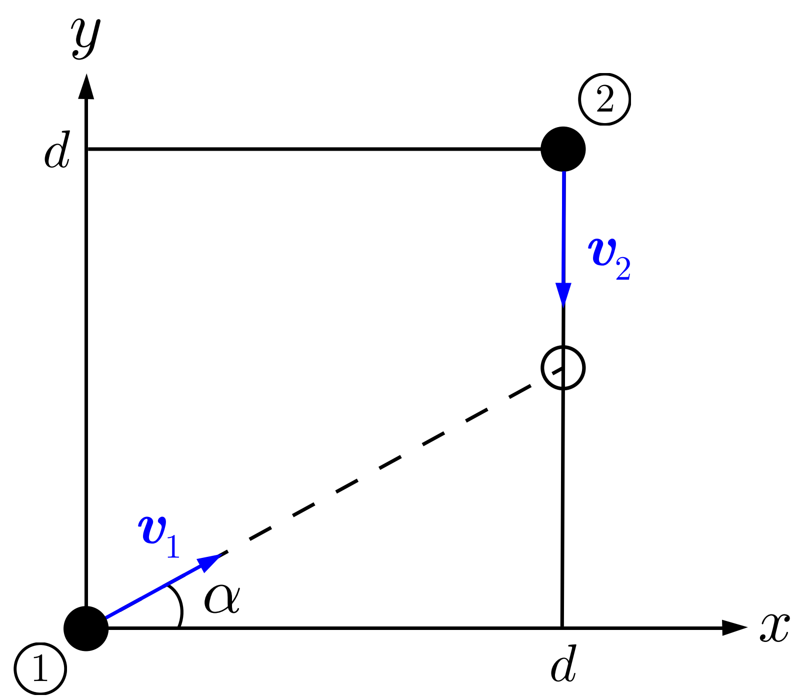
$$\lim_{d' \to d} a_0 = \lim_{d' \to d} \frac{2\,d\,v_v\,(v_v - v_m)}{(d - d')^2} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad a_0 \to \infty$$

A.2.1 Course entre voiture et moto

A.2.2 Carambole (billard indien)

- Le puck (1) est lancé de l'origine O au temps initial $t = 0$ avec un vecteur vitesse $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{cste}$ dans le plan horizontal Oxy selon une droite qui fait un angle α avec l'axe Ox.

- On cherche à déterminer le temps t_1 auquel on doit lancer le puck (2) du point de coordonnées (d, d) avec un vecteur vitesse $\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{cste}$ selon une droite parallèle à l'axe Oy pour qu'il y ait collision.



- Position du puck 1 :

$$x_1(t) = v_1 \cos\alpha\, t \qquad (A.2.7)$$

$$y_1(t) = v_1 \sin\alpha\, t \qquad (A.2.8)$$

- Position du puck 2 :

$$x_2(t) = d \qquad (A.2.9)$$

$$y_2(t) = d - v_2(t - t_1) \qquad (A.2.10)$$

- Collision entre les pucks au temps t_2 (i.e. $t_2 \geqslant t_1$) :

$$x_1(t_2) = x_2(t_2) \quad \Rightarrow \quad v_1 \cos\alpha\, t_2 = d \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{d}{v_1 \cos\alpha} \qquad (A.2.11)$$

$$y_1(t_2) = y_2(t_2) \quad \Rightarrow \quad v_1 \sin\alpha\, t_2 = d - v_2(t_2 - t_1) \qquad (A.2.12)$$

- $(A.2.11) \quad \Rightarrow \quad (A.2.12)$:

$$y_1(t_2) = y_2(t_2) \quad \Rightarrow \quad d\, \underbrace{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}_{=\tan\alpha} = d - v_2\left(\frac{d}{v_1\cos\alpha} - t_1\right)$$

Ainsi,

$$t_1 = \underbrace{\frac{d}{v_1\cos\alpha}}_{=t_2} - \frac{d}{v_2}\left(1 - \underbrace{\tan\alpha}_{\leqslant 1}\right) \geqslant 0 \qquad (A.2.13)$$

- Cas limites :

1. Lancé du puck 1 selon l'axe horizontal Ox $(\alpha \to 0)$:

$$(A.2.13) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 \geqslant v_1 \qquad (A.2.14)$$

$$(A.2.11) \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{d}{v_1} \qquad (A.2.15)$$

1. Si $t_1 = 0$ $\quad (A.2.14) \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1$
2. Si $t_1 > 0$ $\quad (A.2.14) \quad \Rightarrow \quad v_2 > v_1$
3. Si $t_1 = t_2$ $\quad (A.2.14)$ et $(A.2.15) \quad \Rightarrow \quad v_2 \to \infty$

- Lancé du puck (1) selon l'axe diagonal $(\alpha \to \frac{\pi}{4})$:

$$(A.2.13) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{d}{v_1}\sqrt{2} - \frac{d}{v_2}(1 - 1) = \frac{d}{v_1}\sqrt{2} = t_2 \qquad (A.2.16)$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la position initiale du puck (2) correspond à la position de la collision. Ainsi, le puck (2) reste immobile quelle que soit la vitesse constante non nulle du puck (1).